Corrigé

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0{,}9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$.
Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. **a.** *Initialisation :* on a $u_0 = 1\,000 \leqslant 2\,500$: la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2\,500$.
La multiplication par $0{,}9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0{,}9u_n \leqslant 0{,}9 \times 2\,500$ ou $0{,}9u_n \leqslant 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
$0{,}9u_n + 250 \leqslant 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2\,500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0{,}9u_n + 250 - u_n = -0{,}1u_n + 250$.
Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2\,500$, puis $0{,}1u_n \leqslant 0{,}1 \times 2\,500$ ou encore $0{,}1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0{,}1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0{,}1u_n + 250$.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0{,}9u_n + 250 - 2\,500$, soit
$v_{n+1} = 0{,}9u_n - 2\,250 = 0{,}9\,(u_n - 2\,500) = 0{,}9v_n$.
L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

b. On sait que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}9^n = -1\,500 \times 0{,}9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0{,}9^n$.

c. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ et, par suite, par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} -1\,500 \times 0{,}9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2\,500$.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Déterminer cette année.

```
n = 0
u = 1000
  while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

Le programme s'arrêtera la 16e année.